## یونٹ 11

# وَتر اور قَوسیں

# (CHORDS AND ARCS)

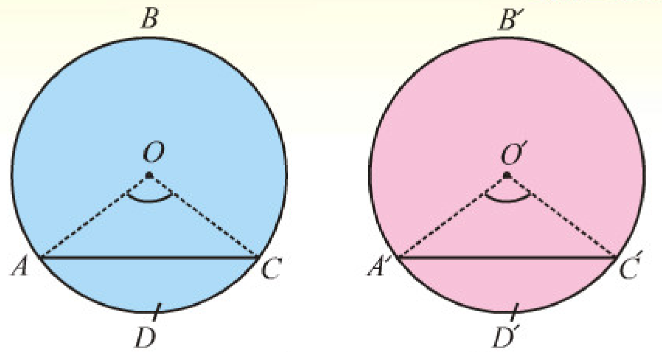
## طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

درج ذیل اثباتی مسائل بمعہ نتائج صریح کو ثابت کرنا اور متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیے ان کا استعمال کرنا۔

- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو قوسیں متماثل ہوں تو ان کے وتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وتر لمبائی میں برابر ہوں تو وہ دو متماثل قوسیں قطع کرتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وتر لمبائی میں برابر ہوں تو ان سے بننے والے مرکزی زاویے بھی مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو مرکزی زاویے مقدار میں برابر ہوں تو ان زاویوں کو بنانے والے وتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔

## مسئلہ 1

دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو قوسیں متماثل ہوں تو اُن کے وَتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔




**معلوم:** $ABCD$ اور $A'B'C'D'$ دو متماثل دائرے ہیں۔ جن کے مراکز بالترتیب $O$ اور $O'$ ہیں

اور $\widehat{ADC} \cong \widehat{A'D'C'}$ یعنی $m\widehat{ADC} = m\widehat{A'D'C'}$

**مطلوب:** $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$

**عمل:** $O$ کو $A$ اور $C$ سے، $O'$ کو $A'$ اور $C'$ سے ملائیں۔

**ثبوت:**

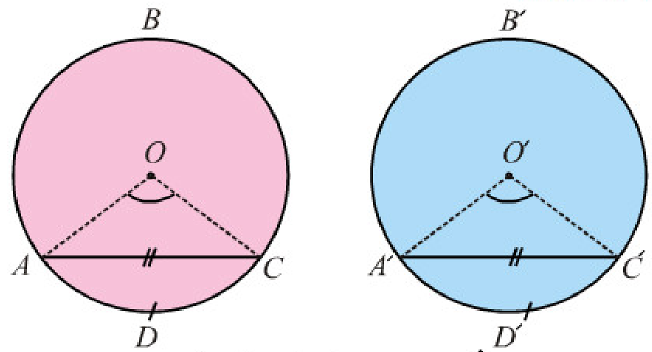
| بیانات | دلائل |
|---|---|
| $ABCD$ اور $A'B'C'D'$ دو متماثل دائرے ہیں جن کے مراکز بالترتیب $O$ اور $O'$ ہیں۔ | معلوم |
| $m\widehat{ADC} = m\widehat{A'D'C'}$ | معلوم |
| اسلیے $m\angle AOC = m\angle A'O'C'$ | متماثل دائروں میں متماثل یا لمبائی میں برابر قوسوں کے مرکزی زاویے |
| اب مثلثان $AOC$ اور $A'O'C$ کی مطابقت میں | |
| $m\overline{OA} = m\overline{O'A'}$ | متماثل دائروں کے رداس |
| $m\angle AOC = m\angle A'O'C'$ | ثابت شدہ |
| $m\overline{OC} = m\overline{O'C'}$ | متماثل دائروں کے رداس |
| $\therefore$ $\Delta AOC \cong \Delta A'O'C'$ | $S.A.S \cong S.A.S$ |

| | |
|---|---|
| اور $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$<br>اِسی طرح یہ مسئلہ ایک ہی دائرے میں بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔ | |

## مسئلہ 2

### (عکس مسئلہ 1)

**دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وَتر لمبائی میں برابر ہوں تو وہ دو متماثل قوسیں قطع کرتے ہیں۔**




**معلوم:** $ABCD$ اور $A'B'C'D'$ دو متماثل دائرے ہیں جن کے مراکز بالترتیب $O$ اور $O'$ ہیں
اور $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$

**مطلوب:** $\widehat{ADC} \cong \widehat{A'D'C'}$ یا $m\widehat{ADC} = m\widehat{A'D'C'}$

**عمل:** $O$ کو $A$ اور $C$ سے، $O'$ کو $A'$ اور $C'$ سے ملائیں۔

**ثبوت:**

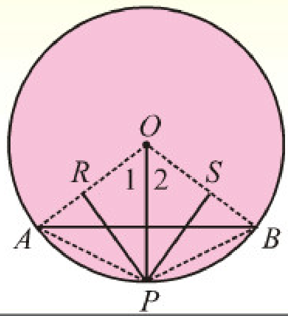
| بیانات | دلائل |
|---|---|
| $\Delta AOC$ اور $\Delta A'O'C'$ کی مطابقت میں | |
| $m\overline{OA} = m\overline{O'A'}$ | متماثل دائروں کے رداس |
| $m\overline{OC} = m\overline{O'C'}$ | متماثل دائروں کے رداس |
| $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$ | معلوم |
| $\therefore$ $\Delta AOC \cong \Delta A'O'C'$ | S.S.S ≅ S.S.S |
| اور $m\angle AOC = m\angle A'O'C'$ | |
| پس $m\widehat{ADC} = m\widehat{A'D'C'}$ | مقدار میں برابر مرکزی زاویوں کے سامنے قوسیں |

**مثال 1:** ایک دائرے کا مرکز $O$ ہے اور $\overline{AB}$ اس کا وتر ہے۔ دائرے پر موجود ایک نقطہ $P$ اِس کے رداسوں $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ سے یکساں فاصلے پر ہے۔ ثابت کریں کہ $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$

**معلوم:** مرکز $O$ والے دائرے کا وتر $\overline{AB}$ ہے۔ دائرے پر موجود ایک نقطہ $P$ اِسکے رداسوں $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ سے یکساں فاصلے پر ہے یعنی $m\overline{PR} = m\overline{PS}$

**مطلوب:** $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$

**عمل:** نقطہ $O$ کو $P$ سے ملائیں۔ دی ہوئی شکل کے مطابق $\angle 1$ اور $\angle 2$ بنائیں۔

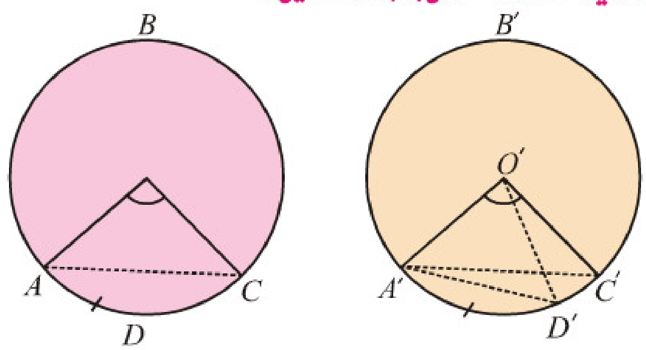



**ثبوت:**

| بیانات | دلائل |
|---|---|
| قائمۃ الزاویہ مثلثان $OPR$ اور $OPS$ میں | |
| $m\overline{OP} = m\overline{OP}$ | مشترک |
| $m\overline{PR} = m\overline{PS}$ | معلوم |
| $\therefore$ $\Delta OPR \cong \Delta OPS$ | قائمۃ الزاویہ مثلثان میں H.S ≅ H.S |
| اور $m\angle 1 = m\angle 2$ | دائرے کے مرکزی زاویے |
| پس $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$ | مقدار میں برابر مرکزی زاویوں کے سامنے قوسیں |

## مسئلہ 3

دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وَتر لمبائی میں برابر ہوں تو اُن سے بننے والے مرکزی زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔



**معلوم:** دو متماثل دائروں $ABC$ اور $A'B'C'$ کے مراکز بالترتیب $O$ اور $O'$ ہیں

اور $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ یا $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$

**مطلوب:** $\angle AOC \cong \angle A'O'C'$

**عمل:** فرض کریں کہ اگر $m\angle AOC \neq m\angle A'O'C'$ ہو تو $\angle AOC \cong \angle A'O'D'$۔ $D'$ کو $A'$ اور $O'$ سے ملائیں۔

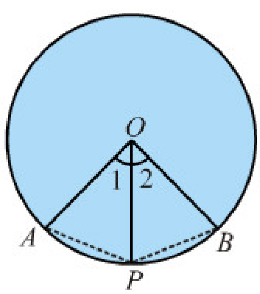
**ثبوت:**

| بیانات | دلائل |
|---|---|
| $\angle AOC \cong \angle A'O'D'$ | عمل |
| اس لیے (i) $\widehat{AC} \cong \widehat{A'D'}$ | متماثل دائروں میں متماثل مرکزی زاویوں کی قوسیں |
| (ii) $\overline{AC} \cong \overline{A'D'}$ یا $m\overline{AC} = m\overline{A'D'}$ | مسئلہ 1 کی رو سے |
| لیکن (iii) $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ یا $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$ | معلوم |
| $\therefore$ $m\overline{A'C'} = m\overline{A'D'}$ | (ii) اور (iii) کی رو سے |
| جو صرف تبھی ممکن ہے جب $C'$ اور $D'$ منطبق ہو جائیں۔ | |
| پس (iv) $m\angle A'O'C' = m\angle A'O'D'$ | |
| لیکن (v) $m\angle AOC = m\angle A'O'D'$ | عمل |
| $m\angle AOC = m\angle A'O'C'$ | (iv) اور (v) کی رو سے |

**نتیجہ صریح 1 :** دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرے میں اگر دو مرکزی زاویے مقداروں میں برابر ہوں قطاع (Sectors) دائرے بھی برابر ہوتے ہیں۔

**نتیجہ صریح 2 :** دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرے میں اگر دو قوسیں لمبائیوں میں غیر برابر ہوں تو اِن سے بننے والے مرکزی زاویے بھی مقداروں میں غیر برابر ہوتے ہیں۔

**مثال 1:** کسی دائرے میں مرکزی زاویے کا اندرونی ناصف مرکزی زاویے سے بننے والی قوس کی تنصیف کرتا ہے۔




**معلوم:** $O$ مرکز والے دائرے میں $\overline{OP}$ مرکزی زاویہ $AOB$ کا اندرونی ناصف ہے۔

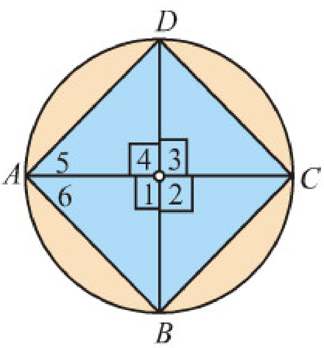
**مطلوب:** $\widehat{AP} \cong \widehat{BP}$ یا $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$

**عمل:** $\overline{AP}$ اور $\overline{BP}$ دو وتر کھینچیں شکل کے مطابق $\angle 1$ اور $\angle 2$ بنائیں۔

**ثبوت:**

| بیانات | دلائل |
|---|---|
| $\Delta OAP \leftrightarrow \Delta OBP$ میں | |
| $m\,\overline{OA} = m\,\overline{OB}$ | ایک ہی دائرے کے رداس |
| $m\angle 1 = m\angle 2$ | $\overline{OP}$ مرکزی زاویہ $\angle AOB$ کا ناصف ہے۔(معلوم)۔ |
| اور $m\,\overline{OP} = m\,\overline{OP}$ | مشترک |
| $\Delta OAP \cong \Delta OBP$ | $(S.A.S \cong S.A.S)$ |
| اور $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ | متماثل مثلثوں کے متماثل بازو |
| پس $\widehat{AP} \cong \widehat{BP}$ | دائرے میں متماثل وتروں کے سامنے قوسیں |

**مثال 2:** کسی دائرے میں قطروں کا کوئی جوڑا ایک دوسرے پر عمود ہو تو اِن کے سروں کو ترتیب وار ملانے سے مربع بنتا ہے۔




**معلوم:** $O$ مرکز والے دائرے میں دو قطر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ قطروں کے سروں کو بالترتیب ملانے سے $ABCD$ ایک چوکور بنتی ہے۔

**مطلوب:** $ABCD$ ایک مربع شکل ہے۔

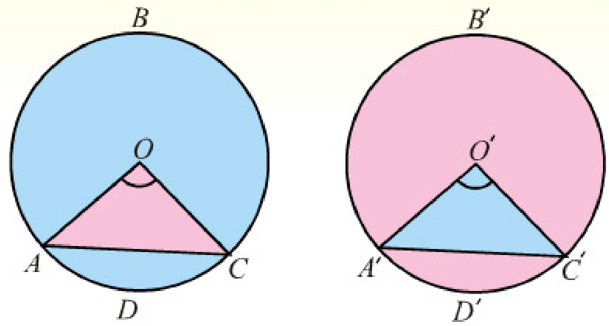
**عمل:** دی ہوئی شکل کے مطابق $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$، $\angle 5$ اور $\angle 6$ لکھیں۔

**ثبوت:**

| بیانات | دلائل |
|---|---|
| $m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 4 = 90^{o}$ | قطروں کا جوڑا ایک دوسرے پر عمود ہے۔ (معلوم) |
| اس لیے $m\,\widehat{AB} = m\,\widehat{BC} = m\,\widehat{CD} = m\,\widehat{DA}$ | دائرے میں مساوی مرکزی زاویوں کی متقابلہ قوسیں |
| $m\,\overline{AB} = m\,\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{DA}$ (i) | مساوی قوسوں کے وتر |
| نیز $m\angle A = m\angle 5 + m\angle 6$ | |
| $45^{o} + 45^{o} = 90^{o}$ (ii) | |
| اِسی طرح | |
| $m\angle A = m\angle C = m\angle D = 90^{o}$ (iii) | |
| پس $ABCD$ ایک مربع ہے۔ | (i) اور (ii) (iii) کی رو سے |

## مسئلہ 4

**11.1(iv)** دو متماثل دائروں یا ایک دائرہ میں اگر دو مرکزی زاویے مقدار میں برابر ہوں تو ان زاویوں کو بنانے والے وتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔




**معلوم:** دو مساوی دائروں $ABCD$ اور $A'B'C'D'$ کے مراکز بالترتیب $O$ اور $O'$ ہیں۔ $\overline{AC}$ اور $\overline{A'C'}$ دونوں دائروں کے بالترتیب وتر ہیں اور $m\angle AOC = m\angle A'O'C'$

**مطلوب:** $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$

**ثبوت:**

| بیانات | دلائل |
|---|---|
| $\Delta OAC \longleftrightarrow \Delta O'A'C'$ میں | |
| $m\overline{OA} = m\overline{O'A'}$ | دو متماثل دائروں کے رداس |
| $m\angle AOC = m\angle A'O'C'$ | معلوم |
| $m\overline{OC} = m\overline{O'C'}$ | دو متماثل دائروں کے رداس |
| اس لیے $\Delta OAC \cong \Delta O'A'C'$ | $SAS \cong SAS$ |
| پس $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$ | |

## مشق 11.1

-1 ایک دائرے میں دو مساوی قطر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کریں کہ $m\ \overline{AD} = m\ \overline{BC}$

-2 ثابت کریں کہ کسی دائرے میں دو متوازی اور مساوی وتروں کے درمیان بننے والی قوسیں مساوی ہوتی ہیں۔

-3 ہندسی طور پر ثابت کریں کہ باہم تنصیف کرنے والے وتر دائرے کے قطر ہونگے۔

-4 ایک دائرے کا مرکز $O$ ہے۔ اِس میں قوس $ACB$ کا وسطی نقطہ $C$ ہے۔ ثابت کریں کہ قطعہ خط $\overline{OC}$ وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے۔

## متفرق مشق 11

### کثیر الانتخابی سوالات

**-1 دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔**

(i) ایک 4 سم لمبائی والا وتر مرکز پر $60^\circ$ کا زاویہ بناتا ہے۔ دائرے کا رداس ________ ہو گا۔

(a) 1 سم (b) 2 سم

(c) 3 سم (d) 4 سم

(ii) ایک دائرے میں وتر اور رداس کی لمبائیاں برابر ہیں۔ وتر سے بننے والا مرکزی زاویہ ________ ہو گا۔

(a) $30^\circ$ (b) $45^\circ$

(c) $60^\circ$ (d) $75^\circ$

(iii) ایک دائرے کی دو متماثل قوسوں میں سے اگر ایک قوس کا مرکزی زاویہ $30^\circ$ ہو تو دوسری کا مرکزی زاویہ ________ ہوتا ہے۔

(a) $15^\circ$ (b) $30^\circ$

(c) $45^\circ$ (d) $60^\circ$

(iv) ایک قوس کا مرکزی زاویہ $40^\circ$ ہے اُسکے متعلقہ وتر کا مرکزی زاویہ ________ ہوتا ہے۔

(a) $20^\circ$ (b) $40^\circ$

(c) $60^\circ$ (d) $80^\circ$

(v) دو متماثل مرکزی زاویے جن دو وتروں سے بنتے ہیں۔ وہ آپس میں ________ ہوں گے۔

(a) متماثل (b) غیر متماثل

(c) متراکب (d) متوازی

(vi) ایک قوس کا مرکزی زاویہ $60^o$ ہے اُسکے وتر کا مرکزی زاویہ ________ ہو گا۔

(a) $20^o$ (b) $40^o$

(c) $60^o$ (d) $80^o$

(vii) دائرے کے نصف محیط کا مرکزی زاویہ ________ ہوتا ہے۔

(a) $90^o$ (b) $180^o$

(c) $270^o$ (d) $360^o$

(viii) اگر دائرے کا وتر مرکزی زاویہ $180^o$ بنائے تو وتر کی لمبائی ________ ہو گی۔

(a) رداس سے کم (b) رداس کے برابر

(c) رداس کا دوگنا (d) اِن میں سے کوئی نہیں

(ix) اگر ایک دائرے کا وتر مرکزی زاویہ $60^o$ بناتا ہے تب وتر اور رداس کی لمبائیاں آپس میں ________ ہوتی ہیں۔

(a) برابر (b) غیر برابر

(c) متوازی (d) عمود

(x) ایک دائرے میں دو غیر متماثل مرکزی زاویوں کے سامنے والی قوسیں ________ ہوتی ہیں۔

(a) متماثل (b) غیر متماثل

(c) متوازی (d) عمود

# خلاصہ

- کسی دائرے میں گومنے والے نقطہ سے اُسی نقطہ تک بننے والا راستہ، **محیط** کہلاتا ہے جبکہ محیط کا ایک ٹکڑا دائرے کی **قوس** کہلاتا ہے۔
- محیط پر دیے ہوئے دو نقاط کو ملانے وَالا قطعہ خط دائرے کا **وَتر** ہوتا ہے۔
- دائرے کا وہ ٹکڑا جو اِسکی قوس اور متعلقہ وَتر نے گھیرا ہو **قطعہ دائرہ** کہلاتا ہے۔
- دائرہ کے دو رداسی قطعات اور اُن سے متعلقہ قوس سے گھرا ہوا علاقہ **دَائرے کا سیکٹر** کہلاتا ہے۔
- کسی دائرے کے مرکز سے گزرنے وَالا قطعہ خط وتر کی تنصیف کرے تو وہ وتر پر عمود ہو گا نیز قطعہ خط جو دائرے کے وتر کی عمودی تنصیف کرے۔ وہ دائرے کے مرکز سے گزرتا ہے۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو قوسیں متماثل ہوں تو ان کے وتر کی لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وتر لمبائی میں برابر ہوں تو وہ دو متماثل قوسیں قطع کرتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وتر لمبائی میں برابر ہوں تو ان سے بننے والے مرکزی زاویے بھی مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو مرکزی زاویے مقدار میں برابر ہوں تو ان زاویوں کو بنانے والے وتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔