یونٹ 4

جزوی کسریں
(PARTIAL FRACTIONS)

طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- واجب کسر، غیر واجب کسر اور ناطق کسر کی تعریف کرنا۔
- ایک الجبری کسر کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنا جب الجبری کسر کا نسب نما مشتمل ہو:
  - غیر مکرر یک درجی اجزائے ضربی پر
  - مکرر یک درجی جزو ضربی پر
  - غیر مکرر دو درجی جزو ضربی پر
  - مکرر دو درجی جزو ضربی پر

4.1 کسر (Fraction)

دو اعداد یا دو الجبری جملوں کی نسبت کو کسر کہتے ہیں نسبت کو بار (—) سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم مقسوم علیہ (Dividend) کو بار کے اوپر اور تقسیم کنندہ (Divisor) کو بار کے نیچے لکھتے ہیں۔ مثال کے طور پر، $\frac{x^2+2}{x-2}$ ایک کسر ہے جبکہ $x-2\neq 0$ اور اگر $x-2=0$ ہو تو ہم کسر $\frac{x^2+2}{x-2}$ کی تعریف نہیں کر سکتے کیونکہ $x-2=0$ ہو تو $x=2$ دی گئی کسر کے نسب نما (Denominator) کو صفر (Zero) کر دیتا ہے۔

4.1.1 ناطق کسر (Rational Fraction)

$\frac{N(x)}{D(x)}$ قسم کا جملہ ناطق کسر کہلاتا ہے جبکہ $N(x)$ اور $D(x)$ متغیر x میں حقیقی عددی سروں کے ساتھ کثیر رقمیاں ہوں۔ جملے میں کثیر رقمی $D(x)\neq 0$ ۔مثال کے طور پر $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x+2)}$ اور $\frac{2x}{(x-1)(x+2)}$ ناطق کسریں ہیں۔

4.1.2 واجب کسر (Proper Fraction)

اگر کسی ناطق کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ میں $N(x)$ اور $D(x)$ متغیر x میں کثیر رقمیاں ہوں اور کثیر رقمی $N(x)$ کا درجہ کثیر رقمی $D(x)$ سے کم ہو، جبکہ $D(x)\neq 0$ ہو تو ایسی کسر واجب کسر کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر، $\frac{2}{x+1}$، $\frac{2x-3}{x^2+4}$ اور $\frac{3x^2}{x^3+1}$ واجب کسور ہیں۔

4.1.3 غیر واجب کسر (Improper Fraction)

اگر کسی ناطق کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ میں کثیر رقمی $N(x)$ کا درجہ کثیر رقمی $D(x)$ کے درجے کے برابر ہو یا زیادہ ہو تو ایسی کسر کو غیر واجب کسر کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر، $\frac{5x}{x+2}$، $\frac{3x^2+2}{x^2+7x+12}$ اور $\frac{6x^4}{x^3+1}$ غیر واجب کسور ہیں۔

کسی بھی غیر واجب کسر کو تقسیم کے عمل کے ذریعے ایک کثیر رقمی اور ایک واجب کسر کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ سے بڑا ہو یا برابر ہو تو ہم $N(x)$ کو $D(x)$ سے تقسیم کر کے حاصل قسمت کثیر رقمی $Q(x)$ اور ایک باقی کثیر رقمی $R(x)$ حاصل کر سکتے ہیں جبکہ $R(x)$ کا درجہ $D(x)$ کے درجہ سے کم ہوتا ہے۔

پس $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ جبکہ $D(x)\neq 0$ ، $Q(x)$ حاصلِ قسمت کثیر رقمی اور $\frac{R(x)}{D(x)}$ واجب کسر ہے۔ مثال کے طور پر $\frac{x^2+1}{x+1}$ ایک غیر واجب کسر ہے۔

اس لیے $\frac{x^2+1}{x+1} = (x-1) + \frac{2}{x+1}$

یہاں غیر واجب کسر $\frac{x^2+1}{x+1}$ کو ایک حاصل قسمت کثیر رقتی $Q(x) = x - 1$ اور ایک واجب کسر $\frac{2}{x+1}$ میں تحلیل کیا گیا ہے۔

مثال 1: $\frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 + 5}$ کو واجب کسر میں تبدیل کریں۔

حل: فرض کریں کہ $N(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ اور $D(x) = x^2 + 5$

بذریعہ تقسیم

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 1 \\
x^2+5 & x^3 - x^2 + x + 1 \\
 & \underline{-x^3 \quad \pm 5x} \\
 & -x^2 - 4x + 1 \\
 & \underline{\mp x^2 \quad \mp 5} \\
 & -4x + 6
\end{array}
$$

لہٰذا $\frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 + 5} = (x-1) + \frac{-4x+6}{x^2+5}$

سرگرمی: واجب اور غیر واجب کسروں کو علیحدہ علیحدہ کریں۔

(i) $\frac{x^2+x+1}{x^2+2}$ (ii) $\frac{2x+5}{(x+1)(x+2)}$ (iii) $\frac{x^3+x^2+1}{x^3-1}$ (iv) $\frac{2x}{(x-1)(x-2)}$

سرگرمی: مندرجہ ذیل غیر واجب کسروں کو واجب کسروں میں تبدیل کریں۔

(i) $\frac{3x^2-2x-1}{x^2-x+1}$ (ii) $\frac{6x^3+5x^2-6}{2x^2-x-1}$

4.2 کسر کی جزوی کسور میں تحلیل

Resolution of Fraction into Partial Fractions

ذیل میں تین کسریں دی گئی ہیں جن کے شروع میں جمع یا تفریق کا نشان ہے۔ ہم آسانی سے ان تینوں کسروں کو جمع کر کے ایک کسر بنا سکتے ہیں۔

پس $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x} = \frac{x(x+1) - 2x(x-1) + 4(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{x^2 + x - 2x^2 + 2x + 4x^2 - 4}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3x^2+3x-4}{x(x-1)(x+1)}$$

دی ہوئی کسروں کی مختصر ترین شکل میں کسر $\frac{3x^2+3x-4}{x(x-1)(x+1)}$، حاصل کسر کہلاتی ہے۔ دی گئی کسور

$\frac{1}{x-1}$ ، $\frac{2}{x+1}$ – اور $\frac{4}{x}$ کسر $\frac{3x^2+3x-4}{x(x-1)(x+1)}$ کے اجزا ہیں۔ ان کسور کو جزوی کسور کہتے ہیں۔ اس یونٹ میں ہم دی ہوئی حاصل کسر کی جزوی کسریں معلوم کریں گے۔ ہر واجب کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ ، $D(x) \neq 0$ کو ہم الجبری کسروں کے مجموعے میں مندرجہ ذیل طریقے سے تحلیل کر سکتے ہیں۔

4.2.1 الجبری کسر کو جزوی کسور میں تحلیل کرنا جب $D(x)$ غیر مکرر یک درجی اجزائے ضربی پر مشتمل ہو۔

پہلا طریقہ (Rule I) اگر یک درجی جزو ضربی $(ax + b)$، $D(x)$ کا جزو ضربی ہو تو جزوی کسر $\frac{A}{ax+b}$ کی شکل میں ہو گی جب کہ مستقل مقدار A معلوم کرنا ہوتی ہے۔

$\frac{N(x)}{D(x)}$ میں کثیر رقمی $D(x)$ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$D(x) = (a_1x + b_1)\ (a_2x + b_2)\ .....\ (a_nx + b_n)$$

یہاں تمام اجزائے ضربی ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔

پس

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \frac{A_3}{a_3x+b_3} + ... + \frac{A_n}{a_nx+b_n},$$

یہاں مستقل مقداریں A_1، A_2، ..... A_n معلوم کرنا ہوتی ہیں۔ دی ہوئی مثال سے واضح ہوتا ہے کہ ہم کس طرح ان مقداروں کو معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 1: $\frac{5x+4}{(x-4)(x+2)}$ کو جزوی کسروں میں تبدیل (تحلیل) کریں۔

حل: فرض کریں کہ

$$\frac{5x+4}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} \qquad \text{(i)}$$

دونوں طرف $(x-4)\ (x+2)$ سے ضرب دینے سے

$$5x + 4 = A\ (x+2) + B\ (x-4) \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) ایک کلیہ (مماثلت) ہے جو کہ x کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے لہٰذا $x = 4$ اور $x = -2$ کے لیے بھی درست ہے۔

مساوات (ii) میں $x - 4 = 0$ یا $x = 4$ رکھنے سے (A کے متناظرہ جزو ضربی)

$$5(4) + 4 = A\ (4+2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 4}$$

مساوات (ii) میں $x + 2 = 0$ یا $x = -2$ رکھنے سے (B کے متناظرہ جزو ضربی)

$$5(-2) + 4 = B(-2-4) \quad \Rightarrow \quad -6B = -6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 1}$$

پس $\frac{1}{x+2}$ ، $\frac{4}{x-4}$ مطلوبہ جزوی کسریں ہیں۔

لہٰذا
$$\frac{5x+4}{(x-4)(x+2)} = \frac{4}{x-4} + \frac{1}{x+2}$$

یہ طریقہ "زیرو کا طریقہ" کہلاتا ہے۔ یہ طریقہ اس وقت کارگر ثابت ہوتا ہے جب مخرج $D(x)$ میں یک درجی اجزائے ضربی ہوں۔

مماثلت (Identity)

مماثلت ایک ایسی مساوات ہوتی ہے جو مساوات میں موجود متغیر کی ہر قیمت کے لیے درست ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر $2(x+1) = 2x+2$ اور $\frac{2x^2}{2} = x^2$ مماثلتیں ہیں کیونکہ یہ مساواتیں x کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہیں۔

مثال 2: $\frac{1}{3+x-2x^2}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

حل: $\frac{1}{3+x-2x^2}$ کو ہم آسانی کے لیے $\frac{-1}{2x^2-x-3}$ لکھ سکتے ہیں۔

یہاں مخرج
$$D(x) = 2x^2 - x - 3 = 2x^2 - 3x + 2x - 3$$
$$= x(2x-3) + 1(2x-3) = (x+1)(2x-3)$$

فرض کریں کہ
$$\frac{-1}{2x^2-x-3} = \frac{-1}{(x+1)(2x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3}$$

دونوں طرف $(x+1)(2x-3)$ سے ضرب دینے سے
$$-1 = A(2x-3) + B(x+1)$$

مساوات کے طرفین میں موجود x کے عددی سروں اور مستقل مقداروں کو برابر رکھنے سے، ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$2A + B = 0 \quad \text{(i)} \qquad \text{اور} \qquad -3A + B = -1 \quad \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) کو حل کرنے سے $A = \frac{1}{5}$ اور $B = \frac{-2}{5}$ حاصل ہوتے ہیں۔

پس
$$\frac{1}{3+x-2x^2} = \frac{1}{5(x+1)} - \frac{2}{5(2x-3)}$$

نوٹ: $\frac{N(x)}{D(x)}$ شکل کی تمام ناطق کسروں کو تحلیل کرنے کا عام طریقہ درجِ ذیل ہے۔

(i) شمار کنندہ $N(x)$ کا درجہ نسب نما $D(x)$ کے درجہ سے کم ہونا چاہیے۔

(ii) اگر $N(x)$ کی ڈگری (درجہ) $D(x)$ کی ڈگری سے زیادہ ہو تو تقسیم کا عمل کیا جاتا ہے اور باقی بچنے والی کسر کو جزوی کسور میں لکھ سکتے ہیں۔

(iii) مستقل مقداروں A، B، C وغیرہ کا مناسب استعمال کریں۔

(iv) دونوں اطراف کو ذواضعاف اقل سے ضرب دیں۔

(v) دونوں طرف رقموں کو ترتیب نزولی میں لکھیں۔

(vi) دونوں طرف x کی ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے مستقل مقداروں کی تعداد کے برابر مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(vii) ان مساواتوں کو حل کرنے سے ہم مستقل مقداروں کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

مشق 4.1

جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

1. $\dfrac{7x-9}{(x+1)(x-3)}$ 2. $\dfrac{x-11}{(x-4)(x+3)}$ 3. $\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

4. $\dfrac{x-5}{x^2+2x-3}$ 5. $\dfrac{3x+3}{(x-1)(x+2)}$ 6. $\dfrac{7x-25}{(x-4)(x-3)}$

7. $\dfrac{x^2+2x+1}{(x-2)(x+3)}$ 8. $\dfrac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}$

4.2.2 کسر کی تحلیل جب $D(x)$ مکرر یک درجی جزو ضربی پر مشتمل ہو

دوسرا طریقہ (Rule II)

اگر کوئی یک درجی جزو ضربی $(ax+b)$، $D(x)$ کی n مرتبہ جزو ضربی ہو تو n جزوی کسور اس شکل میں ہونگی۔

$$\frac{A_1}{(ax+b)}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

یہاں $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مستقل مقداریں ہیں اور $n \geq 2$ مثبت صحیح عدد ہے۔

اس لیے

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{A_1}{(ax+b)}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$

مستقل مقداروں کو معلوم کرنے اور کسر کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنے کا طریقہ کار درجِ ذیل مثال میں واضح کیا گیا ہے۔

مثال: $\dfrac{1}{(x-1)^2\,(x-2)}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

حل: فرض کریں کہ

$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}$$

طرفین کو $(x-1)^2\,(x-2)$ سے ضرب دینے سے

$$1=A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2$$

$$\Rightarrow\quad A(x^2-3x+2)+B(x-2)+C(x^2-2x+1)=1 \qquad \text{(i)}$$

چونکہ (i) ایک ایسی مساوات ہے جو متغیر x کی ہر قیمت کے لیے درست ہے۔

(i) میں $x - 1 = 0$ یا $x = 1$ درج کرنے سے

$$B(1 - 2) = 1 \Rightarrow -B = 1 \quad \text{یا} \quad B = -1$$

(i) میں $x - 2 = 0$ یا $x = 2$ رکھنے سے

$$C(2 - 1)^2 = 1 \Rightarrow C = 1$$

(i) میں دونوں اطراف میں موجود x^2 کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے

$$A + C = 0 \Rightarrow A = -C \Rightarrow A = -1$$

$\frac{1}{(x-2)}$ ، $\frac{1}{x-1^2}$ ، $\frac{-1}{x-1}$ مطلوبہ جزوی کسور ہیں۔

پس
$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

اس مثال سے پتہ چلتا ہے کہ

1- ہم مستقل مقدار کی قیمت معلوم کرنے کے لیے زیروز کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

2- زیروز کا طریقہ استعمال کرنے کے بعد x کی ایک جیسی قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کر سکتے ہیں۔

مشق 4.2

جزوی کسور میں تحلیل کریں۔

1. $\frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2(x-2)}$
2. $\frac{x^2 + 7x + 11}{(x+2)^2(x+3)}$
3. $\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}$
4. $\frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)}$
5. $\frac{7x + 4}{(3x+2)(x+1)^2}$
6. $\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$
7. $\frac{3x^2 + 15x + 16}{(x+2)^2}$
8. $\frac{1}{(x^2-1)(x+1)}$

4.2.3 کسر کو تحلیل کرنا جب $D(x)$ غیر مکرر ناقابلِ تحویل جزو ضربی پر مشتمل ہو۔

تیسرا طریقہ (Rule III)

اگر $D(x)$ میں دو درجی جزو ضربی $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$، موجود ہو تو جزوی کسر $\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)}$ طرز کی ہو گی جبکہ A اور B مستقل مقداریں ہیں جو کہ معلوم کرنا ہوتی ہیں۔

مثال: $\frac{11x + 3}{(x-3)(x^2+9)}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

حل: فرض کریں کہ $\dfrac{11x+3}{(x-3)(x^2+9)} = \dfrac{A}{(x-3)} + \dfrac{Bx+C}{x^2+9}$

طرفین کو $(x-3)(x^2+9)$ سے ضرب دینے سے

$$11x + 3 = A(x^2 + 9) + (Bx + C)(x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad 11x + 3 = A(x^2 + 9) + B(x^2 - 3x) + C(x - 3) \qquad \text{(i)}$$

چونکہ (i) ایک مماثلت ہے۔ اس میں $x = 3$ رکھنے سے

$$33 + 3 = A(9 + 9) \quad \Rightarrow \quad 18A = 36 \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

(i) میں x^2 اور x کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -2$$

$$-3B + C = 11 \quad \Rightarrow \quad -3(-2) + C = 11 \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

اس لیے $\dfrac{-2x+5}{x^2+9}$ اور $\dfrac{2}{x-3}$ مطلوبہ جزوی کسور ہیں۔

پس $\dfrac{11x+3}{(x-3)(x^2+9)} = \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{-2x+5}{x^2+9}$

مشق 4.3

جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

1. $\dfrac{3x-11}{(x+3)(x^2+1)}$ 2. $\dfrac{3x+7}{(x^2+1)(x+3)}$ 3. $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$

4. $\dfrac{9x-7}{(x+3)(x^2+1)}$ 5. $\dfrac{3x+7}{(x+3)(x^2+4)}$ 6. $\dfrac{x^2}{(x+2)(x^2+4)}$

7. $\dfrac{1}{x^3+1}$ [اشارہ: $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$] 8. $\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$

4.2.4 کسر کو تحلیل کرنا جب $D(x)$ مکرر نا قابل تحویل جزو ضربی پر مشتمل ہو۔

چوتھا طریقہ (Rule IV)

اگر $D(x)$ میں دو درجی جزو ضربی $(ax^2 + bx + c)^2$ جبکہ $a \neq 0$ موجود ہو تو جزوی کسور کو یوں لکھتے ہیں۔

$\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)} + \dfrac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}$ مستقل مقداروں A، B، C اور D کو عام طریقے سے معلوم کرتے ہیں۔

مثال 1: $\dfrac{x^3-2x^2-2}{(x^2+1)^2}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

حل: $\dfrac{x^3-2x^2-2}{(x^2+1)^2}$ ایک واجب کسر ہے کیونکہ نسب نما کی ڈگری (درجہ) شمار کنندہ کی ڈگری سے بڑی ہے۔

فرض کریں کہ $\frac{x^3-2x^2-2}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$

طرفین کو $(x^2+1)^2$ سے ضرب دینے سے

$$x^3-2x^2-2=(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D$$

$$x^3-2x^2-2=A(x^3+x)+B(x^2+1)+Cx+D \qquad \text{(i)}$$

x, x^2, x^3 کے عددی سروں (Coefficients) اور مستقل مقداروں کو برابر رکھنے سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

x^3 کے عدد سروں کو برابر رکھنے سے $A=1$

x^2 کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $B=-2$

x کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $A+C=0 \Rightarrow C=-1$

مستقل مقداروں کو برابر کرنے سے $B+D=-2$

$$D=-2-B=-2-(-2)=-2+2=0 \quad \Rightarrow D=0$$

پس $\frac{x^3-2x^2-2}{(x^2+1)^2}=\frac{x-2}{x^2+1}+\frac{-x+0}{(x^2+1)^2}=\frac{x-2}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}$

مثال 2: $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں۔

حل: فرض کریں کہ $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

طرفین کو $(x-1)(x^2+1)^2$ سے ضرب دینے سے

$$2x+1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+1)+(Dx+E)(x-1) \qquad \text{(i)}$$

اب ہم زیرو کا طریقہ استعمال کرتے ہیں $x-1=0$ یا $x=1$ رکھنے سے

$$3=A(1+1)^2 \Rightarrow A=\frac{3}{4}$$

مساوات (i) کی رقموں کو ترتیب نزولی میں لکھنے سے

$$2x+1=A(x^4+2x^2+1)+Bx(x^3-x^2+x-1)+C(x^3-x^2+x-1)+D(x^2-x)+E(x-1)$$

یا

$$2x+1=A(x^4+2x^2+1)+B(x^4-x^3+x^2-x)+C(x^3-x^2+x-1)+D(x^2-x)+E(x-1)$$

$$2x+1=(A+B)x4+(-B+C)x^3+(2A+B-C+D)x^2+(-B+C-D+E)x+(A-C-E)$$

طرفین میں x^4, x^3, x^2 اور x کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے

x^4 کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $A+B=0 \Rightarrow B=\frac{-3}{4}$

x^3 کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $-B+C=0 \Rightarrow C=\frac{-3}{4}$

x^2 کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $2A+B-C+D=0 \Rightarrow D=\frac{-3}{2}$

x کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $\quad -B + C - D + E = 2$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + E = 2 \quad \Rightarrow \quad E = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

مطلوبہ جزوی کسور $\dfrac{\frac{-3}{2}x + \frac{1}{2}}{(x^2+1)^2}$ ، $\dfrac{\frac{-3}{4}x - \frac{3}{4}}{x^2+1}$ اور $\dfrac{3}{4(x-1)}$ ہیں۔

پس $\quad \dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \dfrac{3}{4(x-1)} - \dfrac{3(x+1)}{4(x^2+1)} - \dfrac{(3x-1)}{2(x^2+1)^2}$

مشق 4.4

جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

1. $\dfrac{x^3}{(x^2+4)^2}$

2. $\dfrac{x^4+3x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)^2}$

3. $\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)^2}$

4. $\dfrac{x^2}{(x-1)(x^2+1)^2}$

5. $\dfrac{x^4}{(x^2+2)^2}$

6. $\dfrac{x^5}{(x^2+1)^2}$

متفرق مشق 4

-1 کثیر الانتخابی سوالات

دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) مماثلت $(5x+4)^2 = 25x^2 + 40x + 16$، x کی ________ کے لیے درست ہے۔

(a) ایک قیمت (b) دو قیمتوں

(c) تمام قیمتوں (d) کسی کے لیے نہیں

(ii) تفاعل $(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ قسم کا ________ کہلاتا ہے۔ جبکہ $D(x) \neq 0$ نیز $N(x)$ اور $D(x)$ کثیر رقمیاں ہیں۔

(a) مماثلت (b) مساوات

(c) کسر (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) کسر جس میں شمار کنندہ کا درجہ مخرج کے درجہ سے زیادہ ہو ________ کہلاتی ہے۔

(a) واجب کسر (b) غیر واجب کسر

(c) مساوات (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iv) کسر جس شمار کنندہ کی ڈگری مخرج کی ڈگری سے کم ہو ________ کہلاتی ہے۔

(a) مساوات (b) غیر واجب کسر

(c) مماثلت (d) واجب کسر

(v) $\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)}$ ایک ________ ہے۔

(a) غیر واجب کسر (b) مساوات

(c) واجب کسر (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vi) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ایک ________ ہے۔

(a) یک درجی مساوات (b) مساوات

(c) مماثلت (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vii) $\frac{x^3+1}{(x-1)(x+2)}$ ایک ________ ہے۔

(a) واجب کسر (b) غیر واجب کسر

(c) مماثلت (d) مستقل رقم

(viii) $\frac{x-2}{(x-1)(x+2)}$ کی جزوی کسور ________ قسم کی ہوتی ہیں۔

(a) $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ (b) $\frac{Ax}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

(c) $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x+2}$ (d) $\frac{Ax+B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

(ix) $\frac{x+2}{(x+1)(x^2+2)}$ کی جزوی کسور ________ قسم کی ہوتی ہیں۔

(a) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2+2}$ (b) $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$

(c) $\frac{Ax+B}{x+1} + \frac{C}{x^2+2}$ (d) $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx}{x^2+2}$

(x) $\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$ کی جزوی کسور ________ قسم کی ہوتی ہیں۔

(a) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ (b) $1 + \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x-1}$

(c) $1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ (d) $\frac{Ax+B}{(x+1)} + \frac{C}{x-1}$

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) ناطق کسر کی تعریف کریں۔
(ii) واجب کسر کیا ہوتی ہے؟
(iii) غیر واجب کسر کیا ہوتی ہے؟
(iv) جزوی کسور کیا ہوتی ہیں؟
(v) $\frac{x-2}{(x+2)(x+3)}$ کی جزوی کسور کس طرح بنائی جاسکتیں ہیں؟
(vi) $\frac{1}{x^2-1}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں۔
(vii) $\frac{3}{(x+1)(x-1)}$ کی جزوی کسور معلوم کریں۔
(viii) $\frac{x}{(x-3)^2}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں۔
(ix) $\frac{x}{(x+a)(x-a)}$ کی جزوی کسور کس طرح بنائی جاسکتیں ہیں؟
(x) کیا $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ایک مماثلت ہے؟

خلاصہ

- کسر دو اعداد یا الجبری جملوں کی نسبت ہوتی ہے۔
- $\frac{N(x)}{D(x)}$ قسم کی کسر جس میں $N(x)$ اور $D(x)$ حقیقی عددی سروں کے ساتھ کثیر رقمیاں ہوں جبکہ $D(x) \neq 0$ ناطق کسر کہلاتی ہے۔ ہر کسری جملے کو دو کثیر رقمیوں کی نسبت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔
- ناطق کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ جبکہ $D(x) \neq 0$، واجب کسر کہلاتی ہے اگر شمار کنندہ میں کثیر رقمی $N(x)$ کا درجہ نسب نما میں کثیر رقمی $D(x)$ کے درجہ سے کم ہو۔
- ناطق کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ جبکہ $D(x) \neq 0$، غیر واجب کسر کہلاتی ہے اگر شمار کنندہ میں کثیر رقمی $N(x)$ کا درجہ نسب نما میں کثیر رقمی $D(x)$ کے درجہ سے زیادہ ہو یا برابر ہو۔
- جزوی کسور: حاصل کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$، جبکہ $D(x) \neq 0$ کی تحلیل جب:
  (a) $D(x)$، غیر مکرر یک درجی اجزائے ضربی پر مشتمل ہو۔
  (b) $D(x)$، مکرر یک درجی جزو ضربی پر مشتمل ہو۔
  (c) $D(x)$، غیر مکرر، دو درجی جزو ضربی پر مشتمل ہو۔
  (d) $D(x)$، مکرر دو درجی جزو ضربی پر مشتمل ہو۔