یونٹ 8

مثلث کے ایک ضلع کا ظِل (سایہ)

(PROJECTION OF A SIDE OF A TRIANGLE)

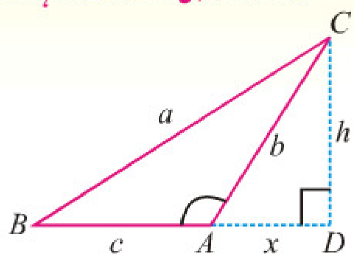
طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

درج ذیل اثباتی مسائل بمعہ نتائج صریح کو ثابت کرنا اور متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیے ان کا استعمال کرنا۔

- کسی منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے اور دو چند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔
- کسی مثلث میں حادہ زاویہ کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے سے کم دو چند (دو گنا) مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔
- کسی مثلث میں کوئی سے دو اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ، تیسرے نصف ضلع کے مربع اور اس کے وسطانیہ کے مربع کے مجموعے کا دوچند (دو گنا) ہوتا ہے۔

مسئلہ 1

8.1(i) کسی منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے اور دو چند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔



معلوم: ABC ایک مثلث ہے جسکے نقطہ A پر BAC منفرجہ زاویہ ہے۔ بڑھے ہوئے ضلع $\overline{BA}$ پر $\overline{CD}$ عمود ہے۔ اس طرح ضلع $\overline{AC}$ کا بڑھے ہوئے $\overline{BA}$ پر $\overline{AD}$ ظِل ہے۔

فرض کریں $AB = c$ ،$CA = b$ ،$BC = a$ ،$AD = x$ اور $CD = h$

مطلوب: $(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 + 2(m\overline{AB})\ (m\overline{AD})$

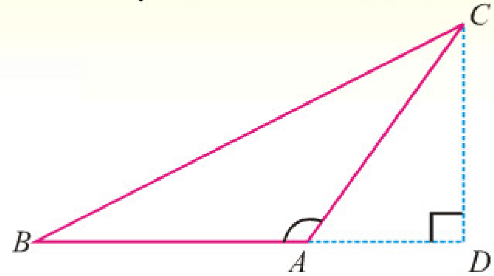
یعنی $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$

ثبوت:

بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ مثلث CDA میں	
$m\angle CDA = 90^\circ$	معلوم
$\therefore \quad (AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
یا $\quad b^2 = x^2 + h^2 \quad$ (i)	
قائمۃ الزاویہ مثلث CDB میں	
$m\angle CDB = 90^\circ$	معلوم
$\therefore \quad (BC)^2 = (BD)^2 + (CD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
یا $\quad a^2 = (c + x)^2 + h^2$	$BD = BA + AD$
$= c^2 + 2cx + x^2 + h^2 \quad$ (ii)	
پس $\quad a^2 = c^2 + 2cx + b^2$	(i) اور (ii) کی رو سے

یعنی	$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$
یا	$(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 + 2(m\overline{AB})(m\overline{AD})$

مثال: مثلث ΔABC میں $\angle A$ منفرجہ ہے۔ اگر $m\overline{AC} = m\overline{AB}$ ہو تو ثابت کریں کہ $(BC)^2 = 2(m\overline{AB})(m\overline{BD})$ جبکہ بڑھے ہوئے ضلع $\overline{BA}$ پر $\overline{CD}$ عمود ہو۔



معلوم: مثلث ΔABC میں $\angle A$ منفرجہ ہے۔ $m\overline{AC} = m\overline{AB}$ اور بڑھے ہوئے ضلع $\overline{BA}$ پر $\overline{CD}$ عمود ہے۔

مطلوب: $(BC)^2 = 2(m\overline{AB})(m\overline{BD})$

ثبوت:

بیانات	دلائل
$(BC)^2 = (BA)^2 + (AC)^2 + 2(m\overline{BA})(m\overline{AD})$	مسئلہ 1 کی رو سے
$= (AB)^2 + (AB)^2 + 2(m\overline{AB})(m\overline{AD})$	معلوم
$= 2(AB)^2 + 2(m\overline{AB})(m\overline{AD})$	
$(BC)^2 = 2m\overline{AB}(m\overline{AB} + m\overline{AD})$	نقطہ A قطعہ خط $\overline{BD}$ پر واقع ہے۔
$= 2(m\overline{AB})\ (m\overline{BD})$	

مشق 8.1

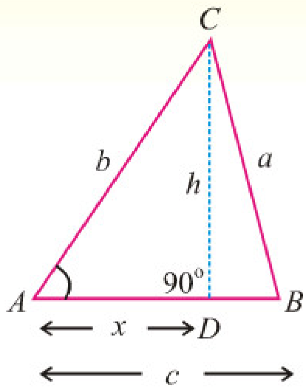
-1 اگر $m\overline{AC} = 1\text{cm}$ ، $m\overline{BC} = 2\text{cm}$ اور $m\angle C = 120^\circ$ تو ضلع AB کی لمبائی اور ΔABC کا رقبہ معلوم کریں۔

(اشارہ) $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 + 2\, m\overline{AC}.\, m\overline{CD}$ جبکہ $(m\overline{CD}) = (m\overline{BC}) \cos (180^\circ - m\angle C)$

-2 اگر مثلث ABC میں $\overline{BC}$ کی لمبائی 6 سم، $\overline{AB}$ کی لمبائی $4\sqrt{2}$ سم اور $m\angle ABC = 135^\circ$ ہو تو $m\overline{AC}$ معلوم کیجیے۔

مسئلہ 2

8.1 (ii) کسی مثلث میں حادہ زاویہ کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے سے کم دوچند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔



معلوم: ΔABC میں نقطہ A پر $\angle CAB$ حادہ زاویہ ہے۔

فرض کریں۔ $m\overline{BC} = a\ ,\ m\overline{CA} = b\ ,\ m\overline{AB} = c$

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$ کھینچا اِس طرح $\overline{AD}$، ضلع $\overline{AC}$ کا $\overline{AB}$ پر ظِل ہے اور

$m\overline{AD} = x\ ,\ m\overline{CD} = h$

مطلوب: $(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 - 2(m\overline{AB})\ (m\overline{AD})$

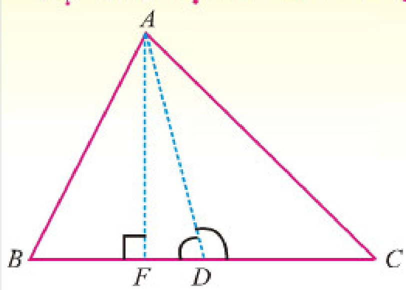
یعنی $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

ثبوت:

بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ ΔCDA میں	
$m\angle CDA = 90^{\circ}$	معلوم
$(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
یعنی $b^2 = x^2 + h^2$ (i)	
قائمۃ الزاویہ $\Delta\ CDB$ میں	
$m\angle CDB = 90^{\circ}$	معلوم
$(BC)^2 = (BD)^2 + (CD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
$a^2 = (c-x)^2 + h^2$	بذریعہ شکل
یا $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$ (ii)	
$a^2 = c^2 - 2cx + b^2$	(i) اور (ii) کی رو سے
پس $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$	
یعنی $(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 - 2(m\overline{AB})\ (m\overline{AD})$	

مسئلہ 3

8.1 (iii) کسی مثلث میں کوئی سے دو اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ، تیسرے نصف ضلع کے مربع اور اس کے وسطانیہ کے مربع کے مجموعے کا دوچند ہوتا ہے۔



معلوم: مثلث ΔABC میں وسطانیہ $\overline{AD}$ ضلع $\overline{BC}$ کی نقطہ D پر تنصیف کرتا ہے۔ یعنی $m\overline{BD} = m\overline{CD}$

مطلوب: $(AB)^2 + (AC)^2 = 2[(BD)^2 + (AD)^2]$

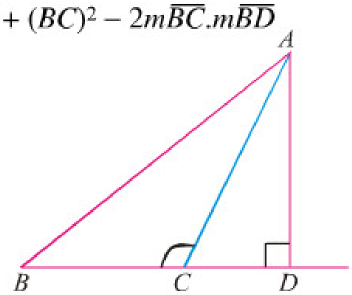
عمل: $\overline{AF} \perp \overline{BC}$ کھینچا۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔADB میں چونکہ $\angle ADB$ حادہ ہے۔	
$(AB)^2 = (BD)^2 + (AD)^2 - 2m\overline{BD}.\ m\overline{FD}$ (i)	مسئلہ 2 کی رو سے
اب ΔADC میں چونکہ $\angle ADC$ نقطہ D پر منفرجہ زاویہ ہے۔	
$(AC)^2 = (CD)^2 + (AD)^2 + 2m\overline{CD}.\ m\overline{FD}$	مسئلہ 1 کی رو سے
$(AC)^2 = (BD)^2 + (AD)^2 + 2m\overline{BD}\ m\overline{FD}$ (ii)	معلوم
$(AB)^2 + (AC)^2 = 2(BD)^2 + 2(\overline{AD})^2$ (iii)	(i) اور (ii) کو جمع کرنے سے
تب	
پس $(AB)^2 + (AC)^2 = 2[(BD)^2 + (AD)^2]$	

مثال 1: ΔABC میں $\angle BCA$ منفرجہ زاویہ ہے۔ $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ جبکہ $\overline{BD}$، ضلع $\overline{AB}$ کا $\overline{BC}$ پر ظل ہے۔ ثابت کریں کہ

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{BC}.m\overline{BD}$$



معلوم: ΔABC میں زاویہ C منفرجہ زاویہ ہے۔ اِس طرح $\angle B$ حادہ زاویہ ہے۔ جبکہ $\overline{BD}$، ضلع $\overline{AB}$ کا بڑھے ہوئے $\overline{BC}$ پر ظل ہے۔

مطلوب: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{BC}\,.\,m\overline{BD}$

ثبوت:

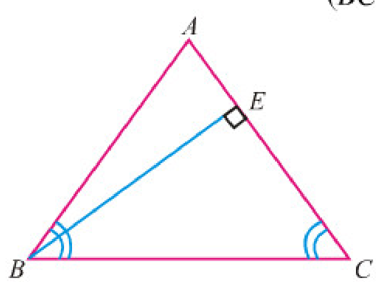
بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ ΔABD میں	
(i) $(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
قائمۃ الزاویہ ΔACD میں	
(ii) $(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
یا $(AC)^2 = (AD)^2 + (BD - BC)^2$	$m\overline{BC} + m\overline{CD} = m\overline{BD}$
(iii) $(AC)^2 = (AD)^2 + (BD)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{BC}\;m\overline{BD}$	
$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{BC}\;m\overline{BD}$	(i) اور (iii) کی رو سے

مثال 2: متساوی الساقین ΔABC میں اگر $m\overline{AB} = m\overline{AC}$ اور $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ہو تو ثابت کریں کہ

$$(BC)^2 = 2m\overline{AC}.m\overline{CE}$$

معلوم: متساوی الساقین ΔABC میں $m\overline{AB} = m\overline{AC}$ اور $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ جبکہ $\overline{CE}$ ضلع $\overline{BC}$ کا $\overline{AC}$ پر ظل ہے۔

مطلوب: $(BC)^2 = 2m\overline{AC}.m\overline{CE}$



ثبوت:

بیانات	دلائل
متساوی الساقین ΔABC میں $m\overline{AB} = m\overline{AC}$ اگر $\angle C$ حادہ زاویہ ہو۔ تو	
$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{AC}.m\overline{CE}$	مسئلہ 2 کی رو سے
$(AC)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{AC}.m\overline{CE}$	$m\overline{AB} = m\overline{AC}$
$\Rightarrow \quad (BC)^2 - 2m\overline{AC}.m\overline{CE} = 0$	دونوں جانب $(AC)^2$ منہا کریں
یا $(BC)^2 = 2m\overline{AC}\,.\,m\overline{CE}$	

مشق 8.2

-1 ΔABC میں ضلع $\overline{BC}$ کی پیمائش کریں جبکہ $m\overline{AB} = 6\text{cm}$ ، $m\overline{AC} = 4\text{cm}$ اور $m\angle A = 60^\circ$ ہے۔

-2 مثلث ABC میں $\overline{AB}$ کی لمبائی 6 سم، $\overline{BC}$ کی لمبائی 8 سم، $\overline{AC}$ کی لمبائی 9 سم اور نقطہ D، $\overline{AC}$ کا وسطی نقطہ ہے۔ وسطانیہ $\overline{BD}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

-3 متوازی الاضلاع $ABCD$ میں ثابت کریں کہ

$$(AC)^2 + (BD)^2 = 2\,[(AB)^2 + (BC)^2]$$

متفرق مشق 8

.1 ΔABC میں $m\angle A = 60^\circ$ ہو تو ثابت کریں کہ $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - m\overline{AB}\,.\,m\overline{AC}$

.2 ΔABC میں $m\angle A = 45^\circ$ ہو تو ثابت کریں کہ $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - \sqrt{2}\,m\overline{AB}\,.\,m\overline{AC}$

-3 ΔABC میں $m\overline{BC}$ معلوم کریں جبکہ $m\overline{AB} = 5\text{ cm}$ ، $m\overline{AC} = 4\text{ cm}$ اور $m\angle A = 60^\circ$

-4 ΔABC میں $m\overline{AC}$ معلوم کریں جبکہ $m\overline{AB} = 5\text{ cm}$ اور $m\overline{BC} = 4\sqrt{2}\text{ cm}$ اور $m\angle B = 45^\circ$

-5 ΔABC میں $m\overline{AB} = 10\text{ cm}$ ، $m\overline{BC} = 21\text{ cm}$ اور $m\overline{AC} = 17\text{ cm}$ ہو تو $\overline{BC}$ پر ظِل $\overline{AC}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

-6 اگر مثلث ABC میں $m\overline{AB} = 10\text{ cm}$ ، $m\overline{BC} = 21\text{ cm}$ ، $m\overline{AC} = 17\text{ cm}$ ہو تو ضلع $\overline{BC}$ پر ظِل $\overline{AB}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

-7 اگر ΔABC میں $a = 17\text{ cm}$ ، $b = 15\text{ cm}$ اور $c = 8\text{ cm}$ ہو تو $m\angle A$ معلوم کریں۔

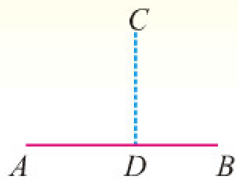
-8 اگر ΔABC میں $a = 17\text{ cm}$ ، $b = 15\text{ cm}$ اور $c = 8\text{ cm}$ ہو تو $m\angle B$ معلوم کریں۔

-9 مثلث کے اضلاع 5 سم، 7 سم اور 8 سم ہیں۔ کیا وہ حادۃ الزاویہ، منفرجۃ الزاویہ یا قائمۃ الزاویہ ہے؟

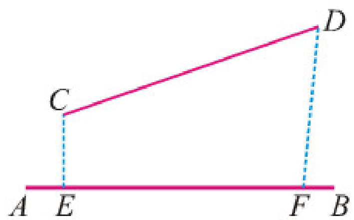
-10 مثلث کے اضلاع 8 سم، 15 سم اور 17 سم ہیں۔ کیا وہ حادۃ الزاویہ، منفرجۃ الزاویہ یا قائمۃ الزاویہ مثلث ہے؟

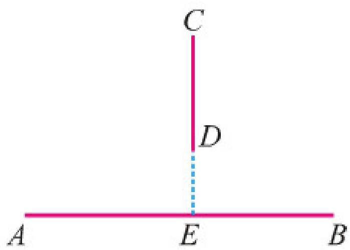
خلاصہ

- کسی نقطہ سے ایک دیے ہوئے قطعہ خط پر عمود کھینچا جائے تو پایۂ عمود کو نقطے کا **ظِل یا سایہ** کہتے ہیں۔ اگر $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ کھینچا جائے تو پایۂ عمود D کو نقطہ C کا ظِل کہیں گے۔



- دیے ہوئے قطعہ خط CD کا کسی دوسرے قطعہ خط AB پر ظِل سے مراد $\overline{EF}$ ہے جو نقطہ E پایۂ عمود C اور نقطہ F پایۂ عمود D، کے درمیان ہوتا ہے، البتہ دیے ہوئے عمودی قطعہ خط CD کا ظِل کسی دوسرے قطعہ خط AB پر اس کا ایک نقطہ E ہے جس کی پیائش صفر ہوتی ہے۔





- کسی منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے اور دوچند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔
- کسی مثلث میں حادہ زاویہ کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے سے کم دوچند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔
- کسی مثلث میں کوئی سے دو اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ، تیسرے ضلع کے نصف کے مربع اور اس کے وسطانیہ کے مربع کے مجموعے کا دوچند ہوتا ہے۔